ELEMENS DE MATHEMATIQUE DE MONSIEUR VARIGNON,

DES ACADEMIES ROYALES DES SCIENCES de France, d'Angleterre, & de Prusse, Professeur de Mathematique au Collège de Mazarin, & Lecteur du Roy en Philosophie au Collège Royal.

A PARIS : Chez Pierre-Michel Brunet, Fils, Grand-Salle du Palais; au cinquième Pilier, au Saint Esprit.

M DCC. XXXXI.
PREFAÇE

E ne puis donner au Public une idée plus juste, & plus avantageuse de ces Eléments de Géométrie, qu'en disant qu'ils sont l'ouvrage du célèbre Monseigneur Varignon, & qu'il y a donné, sur tout pendant les dernières années de sa vie, tous les soins, & toute l'attention dont il étoit capable, pour faciliter à ses Élèves l'étude de la Géométrie. Bien différent en cela de la plupart des grands Géomètres, qui s'occupent principalement à faire de nouvelles découvertes, & se mettent peu en peine de rendre plus aisé le chemin, qui conduit où ils ne sont eux-mêmes parvenus que par des travaux immenses. La méthode qu'il a suivie dans ces Eléments, le met parfaitement à couvert des reproches, qu'on fait peut-être avec aïsés de fondement à la plupart des Géomètres, en les accusant de manquer d'ordre dans l'arrangement...
ÉLÉMENTS DE
MATHEMATIQUE.

Les Mathématiques considèrent les propriétés des grandeurs. On appelle grandeur, tout ce qui peut être augmenté ou diminué; et comme toute grandeur est étendue ou nombre, on peut diviser les Mathématiques en deux parties; savoir, l'Algèbre et la Géométrie. Toutes les autres, comme les Mécaniques, l'Optique, les Fortifications, &c. ne sont qu'une application de l'Algèbre et de la Géométrie à la Physique.

L'Algèbre traite des grandeurs considérées en général, c'est pourquoi les principes de l'Algèbre sont les premiers éléments de toutes les Mathématiques; et comme toutes les règles de l'Aritmétique sont tirées de...
de leur matière. Monsieur Varignon s’étudiait à mettre tout dans le plus grand jour, il ne s’épargnait point, comme font quelquesfois de grands hommes, le travail de l’arrangement beaucoup moins flatteur, & souvent plus pénible que celui de la production même ; comme le dit l’illustre Auteur, dont la plume savante & délicate consacre à l’immortalité, la mémoire de ces grands Hommes, qui font tous les jours de nouvelles découvertes dans les Sciences les plus sublimes. Les principes de Géométrie sont développés dans cet Ouvrage avec tant de clarté & d’exactitude, les propositions y sont enchaînées d’une manière si simple & si naturelle, les démonstrations sont si courtes & si faciles, qu’on y reconnaîtra aisément la supériorité du génie de celui qui en est Auteur. Il n’a jamais donné ses Eléments de Géométrie qu’en Latin, je les ai traduits en François, avec autant de fidélité & de précision qu’il m’a été possible, afin de les rendre utiles à un plus grand nombre de personnes ; c’est le même motif qui m’a déterminé à y joindre un abrégé d’Algèbre & d’Arithmétique, tiré du même Auteur, pour servir d’introduction à toutes les parties des Mathématiques.
LEMENS
l'Algèbre, nous ne séparerons point l'Arithmétique de
l'Algèbre; mais nous joindrons par tout les calculs d'A-
arithmétique à ceux d'Algèbre, pour faire mieux sentir
l'analogie qui est entre eux.
L'Algèbre emploie dans ses calculs les lettres de l'al-
phabet, & l'Arithmétique se sert des signes qu'on ap-
pelle chiffres.
Nous diviserons ce traité d'Algèbre en quatre livres.
Dans le premier nous parlerons de l'addition, soustrac-
tion, multiplication & division; dans le second, des pro-
portions & des fractions; dans le troisième, de l'extrait-
tion des racines; & dans le quatrième, des équations.

PRINCIPES GENERAUX.
Il y a trois sortes de principes sur lesquels toutes les
Mathématiques sont fondées; savoir, les définitions,
les axiomes & les demandes.

DEFINITIONS GENERALES.
1.
Les définitions expliquent la signification des mots dont
on se sert, par exemple, ce qu'on doit entendre par les
mots de triangle, de point, &c.

2.
Les demandes sont des suppositions si simples, que
toute personne, pour peu de réflexion qu'elle y fasse,
doit les admettre; par exemple on demande, pour par-
venir à une démonstration, qu'il soit permis de mener
une ligne d'un point à un autre point, ou d'imager
qu'elle y soit menée.

3.
Les axiomes sont des vérités évidentes à toute per-
sonne qui y fait attention; par exemple, le tout est plus
grand que la partie.
TABLE
DES ELEMENS D'ALGEBRE
& d'Arithmetique.

PRINCIPES GENERAUX

Définitions générales. Page 2
Demandes générales. 3
Axiomes généraux. 4

LIVRE PREMIER. De l'addition, soustraction, multiplication & division des grandeurs entières.

CHAPITRE I. De l'addition.
Définition I. Ce qu'on entend par addition. 7
Définition II. Ce que c'est que nombre. 7
ARTICLE I. De l'addition des nombres.
Première proposition. Ajouter ensemble des nombres entiers. 8
Démonstration de l'addition. 10
ARTICLE II. De l'addition des grandeurs générales, entières, exprimées par des lettres. 11

CHAPITRE II. De la soustraction des grandeurs entières, d'autres grandeurs entières.
Définition III. Ce qu'on entend par soustraction. 12
ARTICLE I. De la soustraction des nombres entiers. 12
Proposition II. Trouver la différence de deux nombres, ou ôter le plus petit du plus grand. 13
ARTICLE II. De la soustraction des grandeurs générales, entières, exprimées par des lettres. 14

CHAPITRE III. De la multiplication des grandeurs entières.
Définition IV. Ce que c'est que la multiplication. 15
Proposition III. Multiplier toutes fortes de nombres. 16
Démonstration de la multiplication.

ARTICLE II. De la multiplication des grandeurs générales, entières, exprimées par des lettres. 20

CHAPITRE IV. De la division des grandeurs entières.
Définition V. Ce qu'on entend par division. 22
ARTICLE I. De la division des nombres. 22
Proposition IV. Diviser toutes fortes de nombres les uns par les autres, les plus grands par les plus petits. 22
ARTICLE II. De la division des grandeurs générales, entières, exprimées par des lettres. 27

LIVRE SECONDE. Des proportions.

Partie I.
Élements de Géométrie

À Géométrie est une partie fondamentale des Mathématiques, qui considère l'étendue en particulier. L'étendue en longueur considérée sans largeur & profondeur, se nomme ligne. L'étendue en longueur & largeur considérée sans profondeur, se nomme surface. L'étendue en longueur, largeur & profondeur, se nomme corps ou solide.

Ces trois sortes d'étendue sont l'objet de la Géométrie.

Nous la divisons en deux parties, dont la première est la Géométrie spéculative; & la seconde, la Géométrie pratique.

Partie II.
PREMIERE PARTIE.

De la Géométrie spéculative.

La Géométrie spéculative contient cinq Livres. Dans le premier nous traiterons des lignes ; Dans le second, des surfaces ; Dans le troisième, des propositions, ou des règles de comparer des grandeurs, entre elles ; Dans le quatrième, des proportions des lignes droites & des figures qu'elles renferment ; Et dans le cinquième, des solides & des corps.

Axiomes ou vérités connues d'elles-mêmes.

AXIOME I.
Il est impossible qu'une même chose soit, & ne soit pas en même-temps.

AXIOME II.
Le tout est plus grand que la partie.

AXIOME III.
Le tout est égal à ses parties prises ensemble.

AXIOME IV.
Si à choses égales l'on ajoute choses égales, les sommes seront égales.

COROLLINAIRE I.
Donc, les doubles, triples, &c. des choses égales, sont égaux.

COROLLINAIRE II.
Donc, si à choses égales on ajoute choses inégales ;
DE GEOMETRIE.

il est aisé de voir comment on peut mesurer ces mêmes figures par le moyen de la Trigonométrie, dont nous allons parler dans le chapitre suivant, qui ne comprend que trois Théorèmes, dans lesquels est renfermé l'art de mesurer toutes sortes de longueurs, largeurs, &c.

---

CHAPITRE SECONDE.

De la Trigonométrie rectiligne.

A Trigonométrie enseigne à mesurer toutes sortes de triangles; le triangle est composé de trois côtés, & de trois angles. Si de ces six choses on en connaît trois, pourvu qu'il y ait un côté entre ces trois choses connues, on trouve les trois autres par la règle de trois, qu'on nomme ordinairement la règle d'or. Il faut donc que ces parties soient proportionnelles, & qu'on en connoisse les proportions; mais parce qu'on ne saurait les connoître sans réduire en lignes droites ce qu'il y a de circulaire dans les triangles, (comme la mesure des angles) c'est pour cela que les Mathématiciens déterminent la grandeur que les lignes droites appliquées au cercle, ont par rapport au diamètre, qui sert à connoître la valeur des lignes droites, dont on se sert pour mesurer les triangles. Il y en a de trois sortes; savoir, les sinus, les sécantes & les tangentes.

DEFINITION XXII.

La ligne perpendiculaire $AE$, qui tombe de l'extrémité de l'arc $AB$, sur le rayon $CB$, est appelée le sinus de l'arc $AB$, ou de l'angle $ACB$, dont cet arc (Th. 16.) est la mesure. La ligne $CD$, qui n'est que la ligne $AC$ prolongée jusques à la tangente, se nomme la sécante du même angle, ou du même arc, $BD$ continue jusques à la sécante, est appelée tangente.
DE GEOMETRIE.

Voilà les Éléments de Géométrie dont nous allons faire voir l'utilité en passant à la seconde Partie.

SECONDE PARTIE.

De la Géométrie Pratique.

La Géométrie Pratique enseigne à mesurer toutes sortes d'étendues, & comme toute étendue est, ou ligne, ou surface, ou solide, nous la diviserons en trois Chapitres. Dans le premier, nous traiterons des lignes; dans le second, des surfaces; & dans le troisième, des solides.

CHAPITRE PREMIER.

De la position & de la mesure des lignes droites.

PROBLEMES.

Mener d'un point donné, une ligne perpendiculaire à une autre ligne donnée.

SOLUTION.

Ou le point donné est dans la ligne droite ou hors de la ligne droite donnée.

PREMIER CAS.

Si le point donné est D hors de la ligne droite FC, & que par ce point D il faille mener une ligne perpendiculaire à cette ligne FC. Du centre D il faut décrire un arc de cercle qui coupe la ligne droite FC dans deux points M & N, & de ces mêmes points, comme
point $O$ & compter autant de parties depuis $O$ vers $I$, qu'on en a trouvé dans la ligne $OI$, & cela selon l'endroit par où on veut que passe la ligne $OI$. Ensuite qu'à l'extrémité $I$, on faîse (Probl. 39.) l'angle marqué sur le papier, & qu'on place l'instrument de telle sorte que l'on puisse voir, par les pinnules de la règle immobile, le bâton fiché en $O$, & par celles de la règle mobile, un autre bâton fiché dans un des points que l'on découvre par les pinnules de cette règle, qui marque la valeur de l'angle. Il faut de même prendre autant de parties depuis $I$ vers $K$, qu'il y en a de marquées sur le papier, & faire dans le point $K$ (Probl. 39.) un angle de la grandeur requise, & laisser un bâton fiché en $K$, & opérer de même dans toute la circonférence. Lorsqu'on fera parvenu en $N$, qu'on place dans ce point $N$, l'instrument de façon que par une de ses règles, on voye le bâton laissé en $M$, & par l'autre celui qui est en $O$, si pour lors l'angle de l'instrument, convient avec l'angle marqué sur le papier, & la distance qui est entre $N$ & $O$ sur la terre, mesurée par le moyen d'une corde, avec les parties marquées sur le papier, la figure proposée sur le papier, a bien été transportée sur la terre, autrement l'on s'est trompé, & il faut recommencer l'opération.

PROBLEME XLIII.

Tracer sur le papier une figure rectiligne, par exemple, une ville, un château, une citadelle, &c.

SOLUTION.

Soit la ville dont le circuit est $ABCDEFGH$, qu'il faut placer & transporter sur le papier. Après avoir fiché des bâtons dans tous les angles, ou quelque autres marques, il faut commencer par tel angle qu'on voudra, par exemple par l'angle $A$, où l'on place l'instrument, & l'on observe l'angle $HAB$. Ensuite on transporte l'instrument en $B$, & l'on mesure avec une corde la ligne $AB$, & après avoir observé l'angle $ABC$, on transporte l'instrument en $C$, & l'on mesure la ligne $BC$. On fait la même chose dans tout
Mesurer la surface de la terre.

SOLUTION.

Les observations faites par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences, prouvent qu'un degré d'un grand cercle de la terre, est à peu près égal à 25 lieues ; si on multiplie donc 360, qui exprime le nombre des degrés d'un cercle, par 25, le produit sera la valeur du circuit de la terre, qui est 9000 lieues ; mais parce que comme 22 est à 7, de même le contour de 9000 lieues est au diamètre du grand cercle de la terre, ce diamètre est environ de 2864 lieues. Donc puisque (Th. 38.) l'aire du cercle est égale au demi-rayon multiplié par la circonférence de ce même cercle, & la surface de la sphère (Th. 47.) égale à l'aire de quatre de ses grands cercles, la surface de la terre sera de 25, 776, 000 lieues carrées. Ce qu'il fallait trouver.

CHAPITRE TROISIEME.

De la mesure des solides ou des corps.

PROBLEME LVI.

À base & la hauteur d'un prismé, d'un parallélépipedé étant données, trouver leur solidité ou leur masse.

SOLUTION.

Si le prisme ou le parallélépipedé est rectangle, sa masse ou solidité sera égale au produit de sa base multipliée par sa hauteur, & cela pour la même raison qui prouve que le parallélogramme rectangle est égal au produit de sa base par sa hauteur.
E L E M E N S

est un angle droit, $OHK + OYK$ seront aussi égaux aux angles $OKH + OKY$. Donc en ôtant les angles égaux $OHK$, $OKH$, les angles $OYK$, $OKY$ qui resteront, seront aussi égaux; et par conséquent (Part. 2, Th. 22.) $OK = OY$, et ainsi $HY = HO + OK >$ que $HSK$; ce que l'on peut démontrer de la même manière que l'on a démontré que la ligne $HA$ étroit plus grande que l'arc $HKL$. On peut en continuant cette même démonstration, faire voir que l'arc $HKL$ tient toujours le milieu entre $HF$ & $HC$; et enfin (après avoir coupé par la moitié une infinité de fois les arcs $HKL$ & $HSK$,) l'arc $HKL$ sera égal à chacune de ces deux lignes qui seront confondues & réduites à la même. Donc, par cette méthode, plus on multiplie ces opérations, plus aussi l'on approche de la valeur rectiligne de l'arc proposé.

P R O B L E M E X X I V.

Mesurer toutes sortes de distances en long, large, ou profond, accessibles par une extrémité seulement, comme la distance du point $B$ au point $A$.

S O L U T I O N.

Après avoir placé le centre du demi cercle dont on se sert pour mesurer toutes sortes de distances, dans le point $B$, il faut diriger son diamètre vers $A$, ensuite il faut diriger la règle mobile autour du centre $B$ vers tel endroit qu'on voudra, par exemple vers $C$, & après avoir pris à volonté & mesuré $BC$, qu'on transporte le centre de l'instrument en $C$, qu'on dirige son diamètre vers $B$ & la règle mobile vers $A$.

Pour lors l'instrument (Th. 16.), dans les deux stations, fera connoître les angles $C$ & $B$ du triangle $ABC$; l'on connoit de plus le côté $BC$ que l'on a pris à volonté. Donc dans ce triangle deux angles avec un côté sont donnés: donc, (Prbl. 19.) l'on connoitra le côté $AB$ cherché.

PRO-
DE GEOMETRIE:

PROBLEME XXV.

Mesurer toutes sortes de distances en long, large, ou profond, inaccessibles, ou bien la distance qui est entre deux points, par exemple $A$ & $B$, dont on ne sauroit approcher.

SOLUTION.

Qu'on observe de deux endroits pris à volonté, les angles $ACB$, $BCD$, $ADC$, $ABD$. Cela étant fait, comme l'on connoit $CD$ pris à volonté, l'on aura deux angles avec le côté $CD$ auquel ils sont adjacens, dans les triangles $ACD$, $ACB$. Donc (Probl. 19.) l'on aura aussi les deux côtés $AD$ & $BD$, avec l'angle $ABD$ compris entre ces côtés, & (Probl. 21.) l'on trouvera le côté $AB$, qui est la distance que l'on cherche.

PROBLEME XXVI.

Déterminer par où passe une ligne droite, dont on ne voit que deux points, qui en sont les extrémités.

SOLUTION.

Soit la ligne droite $AB$ dont on ne voit que les extrémités $A$ & $B$, l'on demande par où passe cette ligne.

Il faut placer le demi cercle, qui est l'instrument dont on se sert pour mesurer toutes sortes de distances, où l'on voudra, pourvu que ce soit dans un endroit d'où l'on voie les deux extrémités $A$ & $B$ de la ligne $AB$, par exemple en $C$, ensuite il faut observer l'angle $ACB$, avec les distances $CA$ & $CB$, que l'on connoîtra (Probl. 24.) ; les deux côtés $AC$ & $BC$ avec l'angle $ACB$ compris entre ces côtés étant connus, l'on connoîtra (Probl. 25.) les angles $A$ & $B$, avec le côté $AB$ du triangle $ACB$. Après cela qu'on marque avec des bâtons ou des piquets, les endroits $G$, $H$ entre les obstacles au travers desquels, passe la ligne $AB$, & qu'on observe les angles $AC G$, $GCH$, $HCB$; par ce moyen l'on connoîtra
DE GEOMETRIE.

Dans le triangle $ABC$, les deux côtés $AB$ & $BC$ avec l'angle $B$, l'on trouvera (Probl. 21.) la base $AC$ avec les angles adjacens, & après avoir été l'angle $BAC$ de l'angle connu $BAE$, il restera l'angle aussi connu $CAE$ avec les côtés $AC$ & $AE$, entre lesquels cet angle est compris; l'on connoîtra aussi (Probl. 21.) les angles & les côtés du triangle $CAE$, & ainsi des autres. Les angles & les côtés des triangles étant connus, l'on trouvera (Probl. 36.) l'aire de chaque triangle, & par conséquent l'aire cherchée de la figure rectiligne $ABCDE$ composée de ces triangles.

Si la figure dont on veut connoître l'aire, est inaccesible, il faut chercher (Probl. 25.) tous les côtés de ces triangles, comme des distances inaccesibles, lesquels étant connus, l'on trouvera (Probl. 36.) l'aire de ces mêmes triangles, & la somme de ces aires, sera l'aire cherchée.

PROBLEME XXXVIII.

Faire des Cartes Topographiques.

SOLUTION.

S'il faut représenter sur le papier plusieurs endroits, par exemple, $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, $H$, $I$; qu'on choisisse deux stations telles qu'on voudra, comme $I$ & $H$, & qu'on place l'instrument en $I$, de manière que par le diamètre du demi cercle l'on puisse voir quelque marque au point $H$. L'instrument étant ainsi disposé, il faut diriger la règle mobile vers chacun de ces endroits, observer tous les angles en $I$, & écrire le nombre des degrés, qui font la mesure de chacun de ces angles, pour s'en souvenir. Cela étant fait, on transportera l'instrument à l'autre station $H$, ayant pris une distance connue du point $H$ au point $I$, par exemple, de cent pas, d'une demi-lieue, &c.

L'instrument étant placé en $H$, de manière que par le diamètre l'on voye la marque qu'on aura laissée dans la première station $I$, la règle mobile fera connoître tous
ELEMENS

les angles en $H$ ; lesquels étant connus pourront facilement être transportés sur le papier par le moyen du cercle, ou du quart de cercle divisé en 90 degrés (Probl. 8.) en menant sur le papier la ligne $IH$, sur laquelle l'on fera les triangles $IAH$, $IBH$, $ICH$, &c. équivalents aux triangles qui sont sur le terrein & qui leur seront semblables. Ces endroits $A$, $B$, $C$, $D$, &c. seront représentés dans les mêmes points sur le papier. L'on divisera la ligne $IH$ pour servir d'échelle, en un nombre de parties, égal à celui qui est connu entre les deux stations prises à volonté $I$ & $H$, & par ce moyen l'on aura une Carte qui représentera la situation de ces endroits les uns par rapport aux autres, & leur distance.

DEMONSTRATION.

Puisque les triangles qui sont sur le papier sont ($Hyp.$) équivalents à ceux qui sont sur le terrein, leurs côtés sont aussi ($Cor. 1. Th. 29.$) dans le même rapport & de la même situation sur le papier & sur le terrein. Donc la situation & la distance de ces endroits sur le terrein, sont représentées sur le papier. Ce qu'il fallait démontrer.

PROBLEME XXXIX.

Faire sur la terre & dans un point marqué d'une ligne donnée, un angle d'une grandeur déterminée.

SOLUTION.

Soit l'angle qu'il faut faire à l'extrémité $A$ de la ligne $AK$, par exemple de 74 degrés. On place le centre du demi-cercle divisé en degrés, qui est l'instrument dont on se sert, dans le point $A$, de manière que le diamètre soit dirigé selon la ligne donnée $AK$, & que l'on voie par les pinnules de ce diamètre, le bâton fiché en $D$ ; entaille il faut diriger la règle mobile $AE$, sur le point de l'instrument qui est éloigné de 74 degrés du point $B$, après cela il faut encore fichir un bâton en $F$, que l'on puisse voir par les pinnules de la règle $AE$ ; il est constant ($Th. 14.$) que la li-
DE GEOMETRIE.

gne droite menée par les points $A$ & $F$, fait un angle de 34 degrés avec la ligne donnée $AK$, & ainsi des autres.

Autre Méthode sans instrumet.

SOLUTION.

Soit tel angle qu'on voudra, par exemple l'angle $B$ proposé sur le papier, qu'il faut tracer sur la terre dans le point $A$ de la ligne donnée $AK$. Qu'on mène la ligne droite $ED$ qui joigne les deux côtés $BE$, $BD$, de l'angle donné sur le papier. Ensuite qu'on fiche des piquets dans le point $A$ donné, & dans tel autre qu'on voudra, par exemple $K$, de la ligne $AK$, qu'on attache à ces deux piquets une corde par ses deux extrémités, & qu'elle soit divisée par le nœud $H$ en deux parties $AH$, $HK$, qui soient à la ligne donnée $AK$, comme $BE$ & $ED$ sont à $BD$. Aprés cela qu'on tende, autant qu'on le pourra, la corde en tirant le nœud $H$, on fera par ce moyen le triangle $AHK$ qui fera (Cor. r. Th. 29.) semblable au triangle donné $BFD$ ; par con- séquent l'angle $A$ sera égal à l'angle $B$. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XL.

Mesurer un angle sur la terre.

PREMIERE SOLUTION.

Il faut placer le centre du demi-cercle dans le sommet de l'angle, & diriger le diamètre vers l'un de ses côtés, de manière qu'on découvre par les pinnules, la marque qu'on y aura mise, ensuite il faut diriger la règle mobile vers l'autre côté dans lequel on voye aussi par les pinnules, la marque qu'on y aura attachée ; l'arc de l'instrument compris entre la règle mobile & le côté du diamètre dirige vers un des côtés de l'angle donné, sera (par le Th. 16.) la valeur de l'angle cherché.